ВЕСОВЫЕ АНАЛОГИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ СОБОЛЕВА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

Б.К.АГАРЗАЕВ
Бакинский Государственный Университет
Sadig.Abdullaev@mail.ru

В работе, в единой постановке, как для обычных, так и для обобщенных потенциалов Рисса, порожденных оператором обобщенного сдвига ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, доказываются весовые аналоги второй теоремы Соболева.

Ключевые слова: потенциал Рисса, обобщенный сдвиг, интегральная характеристика, весовые пространства, максимальные функции

Пусть R^l - эвклидово пространство размерности $l(l \geq 1)$, $m \geq 0, k \geq 0$ – целые числа, $m + k \geq 2$,

$$R^+_{m+k,k} = \{(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+k}) \in R_{m+k} : x_{m+1} > 0, ..., x_{m+k} > 0\};$$

$$T^z u(x) = C_\nu \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi u\left(x' - z', \sqrt{x_{m+1}^2 - 2x_{m+1} z_{m+1} \cos\alpha_1 + z_{m+1}^2}, \ldots, \sqrt{x_{m+k}^2 - 2x_{m+k} z_{m+k} \cos\alpha_k + z_{m+k}^2}\right) \times$$

$\times \sin^{\nu_{m+1}-1}\alpha_1 \cdots \sin^{\nu_{m+k}-1}\alpha_k d\alpha_1 \cdots d\alpha_k$ – оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа– Бесселя [1]:

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d^2}{dx_j^2} + \sum_{j=m+1}^{m+k} \left(\frac{d^2}{dx_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j} \frac{d}{dx_j} \right), \; x \in R^+_{m+k,k}, \gamma_{m+1} > 0, ..., \gamma_{m+k} > 0,$$

$x = (x', x_{m+1}, ..., x_{m+k}), z = (z', z_{m+1}, ..., z_{m+k}), x', z' \in R^m$, $|\gamma_{k,m+k}| = \gamma_{m+1} + ... + \gamma_{m+k}$,

C_ν - нормирующий множитель.

Для полноты рассуждений, в случае $k = 0$ будем считать, что $\gamma_{k,m+k} = (0, ..., 0), R^+_{m+k,k} = R^m$ и T^y – обычный сдвиг: $T^y f(x) = f(x - y)$.

Пусть $0 < \alpha < m + k + |\gamma_{k,m+k}|, k \geq 0$. Рассмотрим обобщенный потенциал Рисса

$$\left(I_\gamma^\alpha\right)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}} f(y)T^y\left(\frac{1}{|x|^{m+k+|\gamma_{k,m+k}|-\alpha}}\right)d\mu(y),$$

$$x\in R^+_{m+k,k},\quad d\mu(y)=y_{m+1}^{m+1}...y_{m+k}^{m+k}dy,\quad dy=dy_1...dy_{m+k}.$$

Отметим, что в случае $k=0$ I_γ^α есть обычный потенциал Рисса [2]. Потенциалы Рисса с обобщенным сдвигом в шкале $L_{p,\gamma}$ пространств были изучены в [3].

Основные результаты работы содержатся в теоремах 1 и 2.

Оценки в терминах интегральных характеристик. Положим m+k=n. Для каждого $S\in\{1,...n-1\}$, $R^+_{n,k}$ разбиваем на прямую сумму пространств R^+_{s,k_s} (точек $_s x=\left(x_{n_1},\cdots,x_{n_s}\right)$ с координатами $x_{n_1},\cdots,x_{n_s}$, где $n_1<\cdots<n_s<n$ и эти координаты фиксируются для дальнейших рассуждений) и $R^+_{n-s,(k-k_s)}$(точек $_s x'$), так что $x=\uparrow\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^+_{n,k}$ (см. в [2]).

Пусть

$m_s=rang\left(\{n_1,\cdots,n_s\}\cap\{1,\cdots,m\}\right)$, $k_s=rang\left(\{n_1,\cdots,n_s\}\cap\{m+1,\cdots,m+k\}\right)$.

Тогда m_s,k_s – целые числа такие, что $0\le m_s\le 0,\ 0\le k_s\le k$ и $m_s+k_s=s.$

Если $m_s>0$ $(k_s>0)$, то полагаем

$\{n_1,\cdots,n_s\}\cap\{1,\cdots,m\}=\{j_{1,}\cdots,j_{m_s}\}$,

$(\{n_1,\cdots,n_s\}\cap\{m+1,\cdots,m+k\}=\{m+i_{1,}\cdots,m+i_{k_s}\})$,

где

$j_{1,}<\cdots<j_{m_s}$ $(i_{1,}<\cdots<i_{k_s})$.

Тогда, очевидно

$_s y=(y_{j_1},\cdots,y_{j_{m_s}},y_{m+i_1},\cdots,y_{m+i_{k_s}})$ и $d_s y=dy_{j_1}\cdots dy_{j_{m_s}}dy_{m+i_1}\cdots dy_{m+i_{k_s}}$

В случае $k_s>0$, положим

$\gamma_{k_s,s}=(\gamma_{i_1},\cdots,\gamma_{k_s})$, $|\gamma_{k_s,s}|=\gamma_{i_1}+\cdots+\gamma_{k_s}$, $y^{\gamma_{k_s},s}=y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}}\cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}$.

В этих обозначениях также полагаем

$m'_s=m-m_s,\quad k'_s=k-k_s,\quad R^+_{s,k_s}=R^=_{m_s+k_s,k_s},\quad R^+_{s,k_s}=R^+_{m_s+k_s,k_s},$

$R^+_{n-s,k-k_s}=R^+_{m'_s+k'_s,k'_s}$.

Далее, $\gamma_{k'_s,n-s}$ обозначается и выбирается из равенства

$\gamma_{k',n}=\uparrow(\gamma_{k_s,s},\gamma_{k'_s,n-s})$, а $y^{\gamma_{k'_s,n-s}}$ и $d\mu_{k'_s,n-s}(y)$ из равенств

$y^{\gamma_{k,n}}=y_{m+1}^{\gamma_{m+1}}\cdots y_{m+k}^{\gamma_{m+k}}=y^{\gamma_{k_s,s}}y^{\gamma_{k'_s},n-s},\quad d\mu(y)=d\mu_{k_s,s}(y)d\mu_{k'_s,n-s}(y),$

соответственно.

При этом считаем, что, если $k_s = 0,$ то множество $\{m+i_{1,} \cdots, m+i_{k_s}\}$ пустое, $m_s = s,\ \gamma_{k_s,s} = (0,\cdots,0)$, $y^{\gamma_{k_s,s}} = 1$, ${}_s y = (y_1,\cdots,y_s)$ и $d\mu_{k_s,s}(y) = d_s y = dy_1 \cdots dy_s$.
Аналогично считаем, что если $k_s = S,$ то $m_s = 0$, множество $\{j_1,..., j_{m_s}\}$ пустое, ${}_s y = (y_{m+i_1},\cdots, y_{m+i_{k_s}})$ и $d\mu_{k_s,s}(y) = y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}\ dy_{m+i_1} \cdots dy_{m+i_{k_s}} = y^{\gamma_{k_s},s} d_s y$.
Пусть $S \subset \{1,..., m+k-1\}$ зафиксировано и $l \in N_s = \{j_{1,} \cdots, j_{m_s}, m+i_{1,} \cdots, m+i_{k_s}\}$.

Совокупность всех функций, измеримых на R^+_{s,k_s} и суммируемых в p –й степени с весом $y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}}$ на множестве $\{x \in R^+_{s,k_s} : |x_l| \ge \xi\}$ $\left(\{x \in R^+_{s,k_s} : |x_l| \le \xi\}\right)$ при любом $\xi > 0$, обозначим через $A^{(s)}{}_{p,\nu}(x_l)$ $\left(A^{(s)*}_{p,\nu}(x_l)\right)$.

Для функций $u \in A^{(s)}{}_{p,\nu}(x_l)$ и $\upsilon \in A^{(s)*}_{p,\nu}(x_l)$ введем характеристики

$$\Omega^{(s)}{}_{p,l}(u,\xi) = \left\{ \int\limits_{\{R^+_{s,k_s} : |x_l| \ge \xi\}} |u(x)|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega^{(s)*}_{p,l}(\upsilon,\xi) = \left\{ \int\limits_{\{R^+_{s,k_s} : |x_l| \le \xi\}} |\upsilon(x)|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \xi > 0, \ \ l = \overline{1, m+k},$$

а также множества

$$J^{(s)}{}_{p,\nu}(x_l) = \left\{ u \in A^{(s)}{}_{p,\nu}(x_l) : \int\limits_0^{\xi} \Omega^{(s)}{}_{p,l}(u,t) \cdot t^{\frac{1+a_l}{p'}} dt < \infty, \ \forall \xi > 0 \right\},$$

$$J^{(s)*}_{p,\nu}(x_l) = \left\{ u \in A^{(s)*}_{p,\nu}(x_l) : \int\limits_{\xi}^{\infty} \Omega^{(s)*}_{p,l}(\upsilon,t) \cdot t^{-\left(\frac{1+a_l}{q}+1\right)} dt < \infty, \ \forall \xi > 0 \right\}.$$

По определению функция $f({}_s x, {}_s x')$, $x = ({}_s x, {}_s x') \in R^+_{m+k,k}$ принадлежит классу $J^{n-s,(s)}{}_{p,\gamma}(x_l)$ ($J^{n\ \ s,(s)}{}_{p,\nu}(x_l)$), если для почти всех ${}_s x \in R^+_{s,k_S}$ сходится интеграл $\int\limits_{R_{n-s,k'_s}} |\ f({}_s x, {}_s x')|^p\ d\mu({}_s x')$ и

$$\| f({}_s y, \bullet)\|_{L_{p,\gamma_{k'_s},n-s}(R_{n-s,k'_s})} \in J^{(s)}{}_{p,\gamma}(x_l) \ (\ \ \| f({}_s y, \bullet)\|_{L_{p,\gamma_{k'_s},n-s}(R_{n-s,k'_s})} \in J^{(s)^*}{}_{p,\gamma}(x_l) \ \ ).$$

Всюду в дальнейшем $L_{p,v}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ – пространство функций, интегрируемых в p-ой степени с весом $y^{v_{m+1}}_{m+1}...y^{v_{m+k}}_{m+k}$, $\beta=\alpha-\dfrac{n-s+\left|\gamma_{k_s^{'},n-s}\right|}{p}$.

Из леммы C работы [4], в случае $\omega(t)=t^{\alpha}$, легко получаем

Лемма C. Пусть $k\ge 0$, $m+k\ge 2$, $s\in\{1,...,m+k-1\}$, $0\le m_s\le m$, $0\le k_S\le k$, $k_S+m_s=s$, $1\le p<\infty$, $0<\alpha<m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|$, $\beta>0$.
Тогда существует $C_1>0$ такое, что для любой функции $f\in L^{loc}_{p,\gamma_{n,k}}\left(R^+_{n,k}\right)$ и для любого $x=\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^+_{n,k}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{R^+_{n,k}} T^y\left(\frac{1}{|x|^{n+|\gamma_{k,n}|-\alpha}}\right)\cdot\left|f(y)\right|y^{\gamma_{k,n}}_{k,n}dy\le C_1\int\limits_{R^+_{s,k_s}} T^{s\,y}\left(\frac{1}{\left|{}_s x\right|^{s+|\gamma_{k_s,s}|-\beta}}\right)\left\|f\left({}_s y,\cdot\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s^{'},n-s}}\left(R^+_{n-s,k_s^{'}}\right)}y^{\gamma_{k_s,s}}d_s y.$$

Эта лемма с использованием теоремы1и теоремы$1'$ из работы [5] позволяет установить некоторые оценки в терминах Ω,Ω^* характеристик функций, для потенциалов Рисса. Эти оценки являются отправным пунктом в установлении весовых аналогов второй теоремы Соболева.

В дальнейшем $a_l=0$, когда $l\in\{j_1,\cdots,j_{m_s}\}$ и $a_l=\gamma_l$, когда $l\in\{m+i_1,\cdots,m+i_{k_s}\}$.

Теорема 1. Пусть $k\ge 0$, $m+k\ge 2$, $s\in\{1,...,m+k-1\}$, $s=k_S+m_s$, $0\le m_s\le m$, $0\le k_S\le k$, $1\le p<\infty$, $0<\alpha<m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|$, $1<p<q<\infty$, $\dfrac{s+\left|\gamma_{k_s,s}\right|}{q}=\dfrac{n+\left|\gamma_{k,n}\right|}{p}-\alpha$ и $l\in N_s$. Тогда

А) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in J^{(s)}{}_{p,v}(x_l)$ и для почти всех $x=\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^+_{m+k,k}$ существует $\left(I^{\alpha}_{\gamma}\right)(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^{(s)}{}_{q,l}\left(I^{\alpha}_{\gamma}(f)(\bullet,{}_s x'),\xi\right)\le C\xi^{-\frac{1+a_l}{p'}}\int\limits_0^{\xi}\Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f\left({}_s y,\bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s^{'},n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)},t\right)t^{\frac{1+a_l}{p'}-1}dt, \text{(А)}$$

Б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in J^{(s)^*}{}_{p,v}(x_l)$ и для почти всех $x=\left({}_s x,{}_s x'\right)\in R^+_{m+k,k}$ существует $\left(I^{\alpha}_{\gamma}\right)(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^{(s)^*}{}_{q,l}\left(I^{\alpha}_{\gamma}(f)(\bullet,{}_s x'),\xi\right)\le C\xi^{\frac{1+a_l}{q}}\int\limits_{\xi}^{\infty}\Omega^{(s)^*}{}_{p,i}\left(\left\|f\left({}_s y,\bullet\right)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s^{'},n-s}}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)},t\right)t^{-\left(\frac{1+a_l}{q}+1\right)}dt, \text{(Б)}$$

где постоянная C не зависит от f и ξ.
Оценки (А) и (Б) позволяют доказать совершенно новые по содержанию теоремы об обобщенных потенциалах Рисса, в пространствах введенных в терминах Ω, Ω^* характеристик, в частности в весовых $L_{p,\gamma}$ пространствах [6].

О пространствах в терминах Ω, Ω^* характеристик функций. По определению, функция $\alpha(t)$, $0 < t < \infty$, принадлежит множеству N $\left(N^*\right)$, если $\alpha(t) \geq 0$ и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha(t) > 0$ для почти всех $t \in (0, \varepsilon)$ $(t \in (\varepsilon, \infty))$.

Скажем, что α принадлежит классу N_1 $\left(N_1^*\right)$, если $\alpha \in N$ $\left(\alpha \in N^*\right)$ и $\forall$ $\varepsilon > 0$ сходится интеграл $\int_0^{\varepsilon} \alpha(t)dt$ $\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha(t)dt\right)$.

Пусть $s \square \{1,\ldots,m+k-1\}, 1 \leq p < \infty$ и $l \in N_s$, для $\varphi \in N_1$ и $\psi \in N_1^*$ введем пространства

$$I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi) = \left\{ \mathrm{u} \in A_{p,\gamma}^{(s)}(x_l) \ : \ \left\| u : I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi) \right\|^p \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{\infty} (\Omega_{p,l}^{(s)}(u,\xi))^p \, \varphi(\xi) d\xi < \infty \right\},$$

$$I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi) = \left\{ u \in A_{p,\gamma}^{(s)^*}(\mathrm{x}_1). \quad \left\| u : I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi) \right\|^p \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{\infty} \left(\Omega^{(s)^*}{}_{p,l}(u,\xi)\right)^p \psi(\xi) d\xi < \infty \right\}.$$

$$I_{p,l}^{n\ \ s,(s)}(\varphi) = \left\{ \mathrm{u} \square J_{p,\gamma}^{n\ \ s,(s)}(x_l) \ : \ \left\| u : I_{p,l}^{n\ \ s,(s)}(\varphi) \right\|^{at} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\| \left\| u({}_s y, \bullet) \right\|_{L_{p,\gamma_{k'_s},n\ \ s}\left(R_{n\ \ s,k'_s}\right)} : I_{p,l}^{(s)}(\varphi) \right\| \right\},$$

$$I_{p,l}^{n\ \ s,(s)}(\psi) = \left\{ u \square J_{p,l}^{n\ \ s,(s)}(\mathrm{x}_1).: \ \left\| u : I_{p,l}^{n\ \ s,(s)}(\psi) \right\|^{at} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\| u({}_s y, \bullet) \right\|_{Lp,\gamma_{k'_s},n\ \ s\left(R_{n\ \ s,k'_s}\right)} : I_{p,l}^{(s)}(\psi) \right\| \right\}.$$

Рассмотрим

$$\left\| u; I_{p,l}^{n-s,(s)}(\varphi) \right\|^p = \int_0^{\infty} \left(\int_{\{R_{s,k_s}^{+} : |x_l| \geq t\}} \left\| u({}_s x, \bullet) \right\|_{L_{p,\gamma_{k'_s}}\left(R_{n-s,k'_s}^{+}\right)}^p d(\mu({}_s x)) \right) \varphi(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\{R_{s,k_s}^{+} : |x_l| \geq t\}} \{ \int_{R_{n-s,k'_s}^{+}} | u(x_s, {}_s x') |^p \ d(\mu({}_s x'))\} d\mu({}_s x) \right) \varphi(t) dt =$$

$$= \int_{R_{n-s,k'_s}} (\int_0^{\infty} \{ \int_{\{R_{s,k_s}^{+} : |x_l| \geq t\}} | u({}_s x, {}_s x') |^p \ d\mu({}_s x)\} \varphi(t) dt) d\mu({}_s x') = \int_{R_{n-s,k'_s}} A d\mu({}_s x'),$$

где

$$A=\int_0^\infty\{\int_{\{R^+_{s,k_s}:|x_l|\ge t\}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\ d\mu({}_sx)\ \}\varphi(t)dt\,.$$

Возьмем функцию $\mathrm{X}({}_sx,t)=\begin{cases}1, если |x_l|\ge t,\\ 0, если |x_l|<t.\end{cases}$. Тогда

$$A=\int_0^\infty\{\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\ \mathrm{X}({}_sx,t)d\mu({}_sx)\}\varphi(t)dt=$$

$$=\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\left(\int_0^\infty \mathrm{X}({}_sx,t)\alpha(t)dt\right)d\mu({}_sx)=\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\left(\int_0^{|x_l|}\alpha(t)dt\right)d\mu({}_sx)=$$

$$=\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\omega(|x_l|)d\mu({}_sx)\,.$$

Мы получили, что

$$\mathrm{A}=\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\omega(|x_l|)d\mu({}_sx)\,,\ \omega(|x_l|)=\int_0^{|x_l|}\varphi(t)dt\,.$$

Таким образом,

$$\left\|u;I^{n-s,(s)}_{p,l}(\varphi)\right\|^p=\int_{R^+_{n-s,k'_s}}Ad\mu({}_sx')=\int_{R^+_{n-s,k'_s}}(\int_{R^+_{s,k_s}}|u({}_sx,{}_sx')|^p\omega(|x_l|)d\mu({}_sx))d\mu({}_sx')=$$

$$=\int_{R^+_{m+k,k}}|u(x)|^p\omega(|x_l|)d\mu(x)\,,$$

откуда

$$\left\|u;I^{n-s,(s)}_{p,l}(\varphi)\right\|=\left\|u:L_{p,\gamma}\left(\omega(|x_l|),R^+_{m+k,k}\right)\right\|.$$

Аналогично доказывается

Лемма1. Пусть $\varphi\in N_1,\psi\in N_1^*$ и $\omega(|x_l|)=\int_0^{|x_l|}\varphi(t)dt\,,\tilde\omega(|x_l|)=\int_t^{|x_l|}\psi(t)dt.$

Тогда

$$I^{(s)}{}_{p,l}(\varphi)=L_{p,\gamma}(\tilde\omega(|x_l|),R^+_{s,k_s})\,,\ I^{(s)^*}{}_{p,l}(\psi)=L_{p,\gamma}(\tilde\omega(|x_l|),R^+_{s,k_s})\,,$$

$$I^{n-s,(s)}_{p,l}(\varphi)=L_{p,\gamma}(\tilde\omega(|x_l|),R^+_{s,k_s})\,,\ I^{n-s,(s)^*}_{p,l}(\psi)=L_{p,\gamma}(\tilde\omega(|x_l|),R^+_{s,k_s})$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Легко видеть, что $\omega(t)$ – возрастающая, а $\tilde\omega(t)$ – убывающая весовые функции.

Для дальнейших построений нам понадобятся следующие варианты теоремы Харди-Литльвуда о максимальных функций.

Лемма 1. Пусть $1<p\le q<\infty$. Для справедливости неравенства

$$(\int_0^d |u(x)F(x)|^q\,dx)^{\frac{1}{q}} \le K(\int_0^d |f(x)\upsilon(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}},$$

постоянной K, независящей от f, необходимо и достаточно выполнение условия

$$C=\sup_{t>0}(\int_t^d |u(x)|^q\,dx)^{\frac{1}{q}}(\int |\upsilon(x)|^{-p'}\,dx)^{\frac{1}{p'}}<\infty,$$

где $p'=\dfrac{p}{p-1},\ F(x)=\int_0^x f(x)dx.$

Лемма 2. Пусть $1<p\le q<\infty$. Для справедливости неравенства

$$(\int_0^d |u(x)\sigma(x)|^q\,dx)^{\frac{1}{q}} \le K(\int_0^d |f(x)\upsilon(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$$

с постоянной K, независящей от f, необходимо и достаточно выполнение условия

$$C=\sup_{t>0}(\int_0^t |u(x)|^q\,dx)^{\frac{1}{q}}(\int_t^d |\upsilon(x)|^{-p'}\,dx)^{\frac{1}{p'}}<\infty,\ \text{где}\quad p'=\frac{p}{p-1},\ \sigma(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

Теорема 2. Пусть $0<\alpha<m+k+|\gamma_{k,n}|,\ k\ge 0,\quad m+k\ge 2,$

$s\,\square\,\{1,...,m+k-1\},\ s=k_S+m_s,$

$0\le m_s\le m,\ 0\le k_S\le k,\ 1<p<q<\infty,\ \dfrac{s+|\gamma_{k_s,s}|}{q}=\dfrac{n+|\gamma_{k,n}|}{p}-\alpha$ и $l\in N_s$.

Тогда, если

а) $\omega(\xi)=\int_0^\xi \varphi(t)dt,\ \tilde{\omega}(\xi)=\int_0^\xi \psi(t)dt\ \ \varphi,\phi\in N_1$ такие, что

$$\underset{0<t}{Sup}(\int_t^d \xi^{-\frac{1+a_l}{p'}q}\varphi(\xi)d\xi)^{\frac{1}{q}}(\int_0^t \psi^{-\frac{p'}{p}}(\xi)\xi^{-(p'-(1+a_l))})^{\frac{1}{p'}}<\infty,\ (X)$$

или

б) $\omega(\xi)=\int_\xi^\infty \varphi(t)dt$ и $\tilde{\omega}(\xi)=\int_\xi^\infty \psi(t)dt$ где $\varphi,\phi\in N_1^*$ такие, что

$$\underset{0<t}{Sup}(\int_0^t \xi^{\frac{1}{q}}\varphi(\xi)d\xi)^{\frac{1}{q}}(\int_t^\infty \psi^{-\frac{p'}{p}}(\xi)\xi^{\left(\frac{1-a_l}{q}-1\right)p})^{\frac{1}{p'}}<\infty,\ (X'),$$

то существует $C>0$ такое, что для любой функции $u\in L_{p,\gamma}\left(\tilde{\omega}(|x_l|),R^+_{m+k,k}\right)$

и для почти всех $x = \uparrow ({}_s x, {}_s x') \in R^+_{m+k,k}$ существует $(I^\alpha_\gamma)(x)$ и имеет место оценка

$$\left\| I^\alpha_\gamma(f)(\bullet, {}_s x') : L_{p,\gamma}\left(\omega(|x_l|), R^+_{s,k_s}\right)\right\| \le C \left\| u : L_{p,\gamma}\left(\tilde{\omega}(|x_l|), R^+_{m+k,k}\right)\right\|$$

Докажем а). Пусть $u \in L_{p,\gamma}\left(\tilde{\omega}(|x_l|), R^+_{m+k,k}\right) = I_p^{(n,s)}(\psi)$ и выполняется (X). Обозначим

$$\mu(\xi) = \psi^{\frac{1}{p}}(\xi)\xi^{\left(1-\frac{1+a_l}{p'}\right)}.$$

Тогда $\psi(\xi) = \mu^p(\xi)\xi^{\left(\frac{1+a_l}{p'}-1\right)p}$ и условие (X) примет вид

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\int_t^d \xi^{-\frac{1+a_l}{p'}q}\varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int \mu^{-p}(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Учитывая теорему 1. и Лемму 1. получаем

$$\left\| I^\alpha_\gamma(f)(\bullet, {}_s x') : L_{p,\gamma}\left(\omega(|x_l|), R^+_{s,k_s}\right)\right\| = \left(\int_0^\infty \left(\Omega^{(s)}{}_{q,l}\left(I^\alpha_\gamma(f)(\bullet, {}_s x'), \xi\right)\right)^q \varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \varphi(\xi)\left(\xi^{-\frac{1+a_l}{p'}}\int_0^\xi \Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f({}_s y, \bullet)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s'},n-s}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right)t^{\frac{1+a_l}{p'}-1}dt\right)^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(\varphi^{\frac{1}{q}}(\xi)\xi^{-\frac{1+a_l}{p'}}\int_0^\xi \Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f({}_s y, \bullet)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s'},n-s}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right)t^{\frac{1+a_l}{p'}-1}dt\right)^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_0^\infty \left(\Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f({}_s y, \bullet)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s'},n-s}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right)t^{\frac{1+a_l}{p'}-1}\right)^p \mu^p(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C\left(\int_0^\infty \left(\Omega^{(s)}{}_{p,i}\left(\left\|f({}_s y, \bullet)\right\|_{L_{p,\gamma_{k_s'},n-s}\left(R^+_{n-s,k'_s}\right)}, t\right)\right)^p \psi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \mathrm{C}\left\| u : L_{p,\gamma}\left(\tilde{\omega}(|x_l|), R^+_{m+k,k}\right)\right\|.$$

Пункт а) теоремы 2 доказан. Аналогично доказывается б).
Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, проф. С.К.Абдуллаеву за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Левитан Б.М.. // Успехи Мат. наук, 6, №2 (1951), с.102-143.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974, 808 с.
3. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. // Док. Расш. Засед. Сем. Инт-та Прикл. Матем. им. И.Н.Векуа, т.3, №2, 1988.
4. Абдуллаев С.К., Агарзаев Б.К. // Вестник Бакинского университета. Серия физ.-мат. наук , № 2, 2013, с. 5-11
5. Абдуллаев С.К., Акперов А.А., Керимов М.К. // Вестник Бакинского университета. Серия физ.-мат. наук № 2, 2010, с. 25-34.
6. Абдуллаев С.К. //ДАН СССР, 1985, т.283, №4, с.777-780.

RİS POTENSİALLARI ÜÇÜN SOBOLEV TEOREMİNİN ÇƏKİLİ ANALOQLARI

B.K.AĞARZAYEV

XÜLASƏ

İşdə vahid qoyuluşda həm adi və həm də Laplas-Bessel diferensial operatoru ilə assosiasiya edən sürüşmə operatorunun doğurduğu Riss potensialları üçün Sobolevin ikinci teoreminin çəkili analoqları isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Riss potensialı, ümumiləşmiş sürüşmə, inteqral xarakteristikası, çəkili fəzalar, maksimal funksiya.

SOBOLEV TEOREM FOR RIESZ POTENTİALS WITH GENERALIZED SHIFT AND ALMOST MONOTONOUS KERNEL

B.K.AGARZAEV

SUMMARY

In this paper, weight analogues of the second Sobolev theorem are proved in a single setting, both for conventional and generalized Riesz potential generated by generalized shift operator associated with the differential Laplace-Bessel operator.

Key words: Riesz potential, generalized shift, integral characteristics weight spaces, maximal functions

Поступила в редакцию: 13.12.2013 г.
Подписано к печати: 27.12.2013 г.